Viðauki D: Talningarfræði

Inngangur

Stærðfræðin hefur sennilega fæðst um leið og menn byrjuðu að telja og því mætti ætla að hún hafi fylgt okkur æði lengi. Sú staðreynd er því fróðleg að enn þann dag í dag eru töluð tungumál meðal frumstæðra þjóðflokka þar sem talnakerfi í okkar skilningi eru ekki til, þar sem einungis eru til hugtökin einn, tveir og margir. Að kunna að telja og hafa hugtök til þess er því kannski ekki alveg jafn sjálfsagt og okkur hættir til að halda og sennilega höfum við flest gleymt þeirri þrotlausu vinnu sem þurftum að leggja á okkur sem börn til að læra tölurnar og til að tileinka okkur þá list að telja.

En þó við teljum okkur fljótt vera orðin nokkuð sjóuð í talningarlistinni, þá kemur samt hik á marga þegar þeir fá verkefni á borð við: Á hve marga vegu má raða spilastokki? Á hve marga vegu má velja röð í Lottóinu? Á hve marga vegu má skipta 12 manna hópi í fjóra fimm manna bíla? Á hve marga vegu má velja sér 10 konfektmola í sælgætisbúð ef þar fást 6 gerðir af molum? Þessar spurningar eru viðfangsefni talningarfræðinnir sem ætlunin er að kynna í þessum viðauka. Eftir lestur hans ætti ofangreindum spurningum, ásamt mörgum öðrum, að vera auðsvarað.

1 Skúffuregla Dirichlets

Eitt gagnlegasta vopnið við lausn dæma af ýmsu tagi er einföld regla, sem oft er nefnd *skúffuregla Dirichlets:*

1.1 Setning. *Ef m hlutir eru látnir í n skúffur og $m > n$, þá lenda að minnsta kosti tveir hlutir í sömu skúffunni.*

Skúffureglan kann að virðast svo augljós að ástæðulítið sé að gefa henni sérstakt nafn. Þó vill hún furðu oft gleymast, og það er dálítil list að átta sig á hvenær og hvernig hún á við. Til frekari glöggvunar skulu sýnd tvö dæmi sem má leysa með þessari reglu.

1.2 Dæmi. Tíu punktum er dreift einhvern veginn innan jafnhliða þríhyrnings með hliðarlengd 1. Sýnið að unnt er að finna tvo punkta þannig að fjarlægðin milli þeirra er minni en $1/3$.

LAUSN: Ein leið til að leysa þetta dæmi felst í að beita skúffureglunni, þar sem hlutirnir eru punktarnir tíu og „skúffurnar“ fást með því að skipta þríhyrningssvæðinu í níu jafnhliða þríhyningssvæði með hliðarlengd $1/3$. Gefa verður punktum sem lenda á mótum þessara minni svæða sérstakan gaum, en við getum valið að vild til hvaða minni þríhyrningssvæðis slíkur punktur á að teljast. Við sjáum nú með skúffureglunni að tveir punktar hljóta að lenda í sama þríhyningssvæði. Aðeins annar þeirra getur verið hornpunktur (því aðeins einn hornpunktur er innan í stærri þríhyrningnum) og þá er fjarlægðin milli þeirra minni en $1/3$.

1.3 Dæmi. Nemandi leysir samtals 40 stærðfræðidæmi á fjórum vikum, þar af að minnsta kosti eitt dæmi á hverjum degi. Sýnið að unnt er að finna n daga samfellt tímabil þannig að á því tímabili leysi nemandinn nákvæmlega 15 dæmi. (Hér er n fyrirfram óþekkt tala.)

Lausn: Innleiðum stærðirnar x_j fyrir fjölda dæma sem nemandinn hefur leyst að loknum j-ta degi og $y_j = x_j + 15$, $j = 1, 2, \ldots, 28$. Þar sem nemandinn leysir a.m.k. eitt dæmi á hverjum degi eru tölurnar x_j allar mismunandi og þar með eru tölurnar y_j einnig allar mismunandi. Ef við getum sýnt að til eru j og k þannig að $x_j = y_k = x_k + 15$, þá er dæmið leyst, því þá hefur nemandinn leyst nákvæmlega 15 dæmi frá og með $(k+1)$-sta degi til loka j-ta dags. En þetta fæst beint úr skúffureglunni, þar sem hlutirnir eru breyturnar x_j og y_j fyrir $j = 1, 2, \ldots, 28$ og eru því 56 talsins, en skúffurnar eru hugsanleg gildi sem x_j og y_j geta tekið en þau eru á bilinu frá 1 til $40 + 15 = 55$. (Takið eftir að x_j-in eru öll ólík, svo að tvö þeirra geta ekki lent í sömu skúffu. Sama gildir um y_j-in.)

2 Margföldunarreglan

Meginreglan sem er undirstaða flestra athugana í talningarfræði er eftirfarandi:

2.1 Setning. (Margföldunarreglan) *Verkefni (eða verk) er samansett úr röð af k skrefum (eða verkþáttum) T_1, T_2, ... ,T_k. Hægt er að framkvæma skrefið T_i á n_i mismunandi vegu ($i = 1, 2, \ldots, k$). Fjöldinn n_i er óháður því hvernig skrefin á undan voru framkvæmd. Þá er hægt að framkvæma verkefnið á $n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k$ mismunandi vegu.*

2.2 Dæmi. Bílskráningarnúmer í Bretlandi fram á 1963 voru samansett af þremur bókstöfum á undan þriggja stafa tölu. Hver var fjöldi mögulegra bílskráningarnúmera?

Lausn: Verkefnið er að búa til bílskráningarnúmer. Við skiptum verkefninu í 4 skref:

T_1 velja fyrsta bókstaf
T_2 velja annan bókstaf
T_3 velja þriðja bókstaf

T_4 velja þriggja stafa tölu

Þá er $n_1 = n_2 = n_3 = 26$ (enska stafrófið hefur 26 stafi). Fjöldinn $n_4 = 999 - 99 = 900$. Fjöldi mögulegra bílskráningarnúmera var því $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 900 = 15.818.400$. Eftir 1963 varð að taka upp annað kerfi.

Það kann að vera að leiðin sem við veljum til þess að framkvæma T_i hafi áhrif á hvernig við megum framkvæma T_{i+1}, en fjöldi möguleikanna n_{i+1} á að vera óháður T_i til þess að beita megi margföldunarreglunni. Næsta dæmi snýst einmitt um þetta.

2.3 Dæmi. Hver er fjöldi talna milli 1 og 999 sem eru sléttar og hafa ólíka tölustafi? (Við lítum á 1 sem 001 o.s.frv.)

LAUSN: Skrefin eru

T_1 velja þriðja tölustafinn
T_2 velja annan tölustafinn
T_3 velja fyrsta tölustafinn

Þá fæst

$$n_1 = 5, \quad n_2 = 9, \quad n_3 = 8.$$

Fjöldi slíkra talna er því $5 \cdot 9 \cdot 8 = 360$. Ef við breytum röð skrefanna þá getum við lent í vandræðum. Reynum t.d.

T_1 velja fyrsta tölustafinn
T_2 velja annan tölustafinn
T_3 velja þriðja tölustafinn

Þá fæst $n_1 = 10$, $n_2 = 9$ en n_3 er 3, 4 eða 5, allt eftir því hvernig við völdum í fyrstu tveimur skrefunum.

2.4 Dæmi. Stafróf inniheldur m stafi. Orð er endanleg runa af stöfum og stafur má koma fyrir oftar en einu sinni í orði. Við spyrjum:
(a) Hver er fjöldi k-stafa orða?
(b) Hver er fjöldi orða með í mesta lagi k stafi?

LAUSN: (a) Verkefnið er að búa til k-stafa orð. Skrefið T_i (fyrir $i = 1, \ldots, k$) er að velja i-ta stafinn. Þá er $n_i = m$ fyrir sérhvert i. Fjöldi k-stafa orða er því $m \cdot m \cdots m$ (k þættir) $= m^k$.

(b) Látum V_i vera mengi allra i-stafa orða. Við táknum fjölda staka í mengi með tveimur strikum, þannig að við getum skrifað

$$|V_i| = m^i$$

Fjöldi orða með í mesta lagi k stafi er því

$$|V_1| + |V_2| + \cdots + |V_k|,$$

en þetta er jafnt

$$m + m^2 + \cdots + m^k = \begin{cases} \dfrac{m(m^k - 1)}{m - 1} & \text{ef } m > 1, \\ k & \text{ef } m = 1. \end{cases}$$

Í þessu dæmi höfum við notað einfalda og augljósa reglu. Ef við höfum k mengi A_1, A_2, ... , A_k þannig að engin tvö þeirra hafi sameiginlegt stak, þá gildir

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k|.$$

Í þessu samhengi er kannski hætta á miskilningi. Fyrir safn af mengjum, eins og A_1, A_2, ... , A_k, er ekki jafngilt að segja að engin tvö þeirra hafi sameiginlegt stak og að segja að sniðmengi þeirra sé tómt, þ.e. að ekki sé til neitt stak sem er í öllum mengjum safnsins. Forsendan að mengin séu sundurlæg tvö og tvö er sterkari en hin. Þetta sést glöggt á eftirfarandi dæmi um þrjú mengi: $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{3, 4, 5\}$ og $A_3 = \{5, 6, 1\}$. Hér er sniðmengi menganna þriggja tómt, en sérhver tvö þeirra hafa sameiginlegt stak. Reyndar fæst hér $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 6$, en $|A_1| + |A_2| + |A_3| = 9$. Eitt markmið okkar verður að finna reglu sem leyfir okkur að reikna $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k|$ þegar forsendan um að engin tvö mengi hafa sameiginlegt stak bregst.

Í næsta dæmi setjum við fram mikilvæga staðreynd.

2.5 Dæmi. Mengi A hefur n stök. Hver er fjöldi mismunandi hlutmengja mengisins A? (Hér eru A sjálft og tóma mengið talin vera hlutmengi.)

LAUSN: Teljum upp stökin í A þannig: x_1, x_2, ... , x_n. Lýsum verkefninu „að búa til hlutmengi“ sem röð af n skrefum T_i ($i = 1, \ldots, n$), þar sem T_i er skrefið „að velja eða hafna x_i“. Þá er n_i jafnt 2 fyrir sérhvert i og hægt er að búa til hlutmengi á 2^n vegu.

3 Fjöldi staka í sammengi

Látum nú A og B vera tvö endanleg mengi. Hvað eru mörg stök í $A \cup B$? Fyrsta ágiskun er $|A| + |B|$, en eins og kom fram í grein 2 þá er það aðeins rétt ef mengin innihalda ekkert sameiginlegt stak. Gallinn við svarið $|A|+|B|$ er að stökin í $A \cap B$ eru tvítalin og það verður að leiðrétta. Sem betur fer er það einfalt og við fáum eftirfarandi niðurstöðu.

3.1 Setning. *Látum A og B vera endanleg mengi. Þá er*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \qquad \blacksquare$$

Samskonar pælingar má nota til að reikna $|A \cup B \cup C|$. Við byrjum með $|A| + |B| + |C|$. Stak sem er bæði í A og B er tvítalið svo við verðum að draga $|A \cap B|$ frá, og sömuleiðis $|A \cap C|$ og $|B \cap C|$. En þá tökum við eftir að stak sem er í öllum mengjunum þrem er þrítalið í upphafi og svo dregið frá þrisvar aftur. Til að leiðrétta þetta er $|A \cap B \cap C|$ lagt við.

3.2 Setning. *Látum A, B og C vera endanleg mengi. Þá gildir*

$$\begin{aligned}&|A \cup B \cup C| \\ &\qquad = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Almennt fæst eftirfarandi setning.

3.3 Setning. *Látum $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vera endanleg mengi. Þá er*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|. \quad \blacksquare$$

Í seinni summunni er lagt saman yfir allar runur $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ af tölum úr menginu $\{1, \ldots, n\}$ þannig að $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$.

Jöfnuna í setningunni má einnig skrifa

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + (-1)^{n+1} S_n,$$

þar sem S_k er summan af fjöldatölum allra sniðmengja af k mengjanna $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

4 Umraðanir

Snúum okkur nú að spurningunni: Á hversu marga vegu er unnt að raða spilastokki? Beitum margföldunarreglunni. Fyrsta spilið er hægt að velja á 52 vegu, annað á 51 veg, þriðja á 50 vegu og svo áfram þangað til að lokum það er aðeins ein leið að velja síðasta spilið. Því má raða spilastokknum á

$$52 \cdot 51 \cdot 50 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = 52!$$

vegu. Þessi tala (sem kallast *aðfeldi* tölunnar 52) er gífurlega stór. Sumar reiknivélar eru með sérstakan takka sem gefur aðfeldi talna (yfirleitt í veldisvísishætti svo sem $5 \cdot 10^{29}$). En án þess að hafa slíkan takka er hægt að reikna $n!$ í góðri nálgun, ef n er ekki of lítið, með því að nota *reglu Stirlings*. Sú regla segir að talan

$$\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

sé góð hlutfallsleg nálgun á $n!$ og því betri sem talan n er stærri. Reiknum þá 52!. Samkvæmt reglu Stirlings er $\ln n!$ (náttúrlegur logri tölunnar $n!$) nálægt

$$\ln\sqrt{2\pi} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n,$$

en fyrir $n = 52$ fæst

$$\ln 52! \approx 156{,}35923.$$

Nú er $\ln 10 = 2{,}3026$. Þá fæst

$$\ln 52! \approx 67{,}9 \cdot \ln 10,$$

þ.e. $52! \approx 10^{67{,}9} = 7{,}9 \cdot 10^{67}$. Reiknivélin mín er með $n!$-takka. Með því að styðja á hann fékk ég svarið $8{,}066 \cdot 10^{67}$.

Mismunandi leiðir til að raða hlutum kallast *umraðanir* eða *uppstokkanir*. Það er hversdagsleg reynsla að raða spilastokki. Við getum verið sammála um það hvert er fyrsta spilið, hvert er annað spilið o. s. frv. (Flestir myndu segja að fyrsta spilið sé það sem er gefið fyrst samkvæmt venjulegum leikreglum.) Ef við spyrjum á hversu marga vegu er unnt að raða n stökum, er ekki eins ljóst hvað við eigum við með orðinu „raða“. Við getum þó ímyndað okkur að við höfum n kassa sem eru tölusettir með tölunum frá 1 til n. Við látum stökin í kassana, eitt í hvern. Frá sjónarmiði stærðfræðinnar getum við sleppt kössunum en í staðinn gefið runu $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ án endurtekninga. Sæti rununnar svara til kassanna og x_k er stakið sem lendir í kassa k.

Oft þarf að velja ákveðinn fjölda staka úr mengi og raða þeim. Ímyndum okkur að við höfum n ólík stök og fyrir gefna tölu k viljum við telja á hversu marga vegu er unnt að velja k þeirra og raða þeim. Slík röðuð samantekt kallast *umröðun á k af n stökum*. Við getum litið á slíka umröðun sem runu $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ af lengd k án endurtekninga úr mengi með n stök. Til að telja fjölda slíkra runa beitum við margföldunarreglunni. Fyrsta stakið x_1 er hægt að velja á n vegu; annað stakið er hægt að velja á $n-1$ veg; þriðja stakið á $n-2$ vegu, og þar fram eftir götu. Að lokum má velja k-ta stakið á $n-k+1$ veg. Fjöldi umraðana á k af n stökum er því

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1).$$

Þessi tala er skrifuð með ýmsum hætti; algengust eru táknin $P(n,k)$, ${}^nP_k$ eða ${}_nP_k$. Ef $k = n$ þá er $P(n,k) = P(n,n) = n!$, sem er fjöldi umraðana á n stökum. Takið eftir því að

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

ef $k < n$. Ef $k = n$ gefur þessi formúla útkomuna $\frac{n!}{0!}$. Við vitum að í þessu tilfelli er $P(n,n) = n!$, þannig að við neyðumst til að túlka $0!$ sem 1 ef við viljum nota sömu regluna áfram.

Hvað gerist þegar $k = 0$? Reglan $P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$ gefur svarið 1. Þetta segir að einungis sé til ein leið til að velja ekki neitt og er í samræmi við almenna skynsemi.

5 Samantektir

Ef við höfum n ólíka hluti og við viljum velja k af þeim, á hversu marga vegu getum við valið? Sérhver möguleiki kallast *samantekt*. Munurinn á samantekt og umröðun er sá að í samantekt skiptir röð stakanna engu máli.

5.1 Dæmi. Á hversu marga vegu er unnt að mynda þriggja manna nefnd úr hópi tíu manna?

Lausn: Við getum valið þrjá menn og raðað þeim á $P(10,3)$ vegu. Sérhver samantekt er þá talin 3! sinnum, því að þremur hlutum er unnt að raða á 3! vegu. Fjöldi mögulegra nefnda er því

$$\frac{P(10,3)}{3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120.$$

Á svipaðan hátt er fjöldi mismunandi samantekta k staka úr mengi með n stökum jafn

$$\frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Ýmis tákn hafa verið notuð fyrir þessa mikilvægu stærð. Til dæmis eru táknin ${}^nC_k$ eða ${}_nC_k$ algeng í gömlum ritum. En nú á dögum er táknið

$$\binom{n}{k}$$

oftast notað og við lesum það „n yfir k“. Af ástæðum sem verða ljósar í næstu grein er þessi tala einnig oft kölluð *tvíliðustuðull*.

Frá stærðfræðilegu sjónarmiði er samantekt k staka úr mengi sem hefur n stök ekkert annað en val á k-staka *hlutmengi* í gefna menginu. (Hinsvegar var farið að tala um samantektir löngu áður en mengjafræðin kom til sögunnar og enn er notað dálítið gamaldags orðalag.) Við getum því túlkað niðurstöðu okkar þannig: Ef gefið er mengi X með n stökum, þ.e. $|A| = n$, þá er fjöldi k staka hlutmengja í A jafn $\binom{n}{k}$.

6 Eiginleikar talnanna $\binom{n}{k}$

Í þessari grein setjum við fram nokkra eiginleika talnanna $\binom{n}{k}$ sem setningar. Þar á meðal sönnum við hina frægu *tvíliðusetningu*. Það er athyglisvert að í flestum tilfellum getum við sannað þessa eiginleika bæði með reikningi og með talningarfræðilegum rökstuðningi.

6.1 Setning. *Fyrir* $0 \le k \le n$ *gildir*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

SÖNNUN: Algebruleg sönnun á þessu er alveg augljós. En talningarfræðileg sönnun felst í þeirri athugasemd að í stað þess að velja k stök úr n stökum, getum við alveg eins hafnað $n-k$ stökum (þ. e. við veljum $n-k$ stök og höfnum þeim). ∎

6.2 Setning. *Ef* $1 \le k \le n-1$ *þá gildir*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

SÖNNUN: Hægri hliðin í jöfnunni er jöfn

$$\begin{aligned}\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right)\\ &= \frac{(n-1)!n}{(k-1)!(n-1-k)!k(n-k)}\\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.\end{aligned}$$

Við getum einnig gefið talningarfræðilega sönnun á þessari niðurstöðu. Talan $\binom{n}{k}$ er fjöldi hlutmengja í menginu $\{1, 2, \ldots, n\}$ sem hafa k stök. Við getum talið þau á þessa leið: Fyrst eru þau hlutmengi sem innihalda stakið 1. Fjöldi þeirra er $\binom{n-1}{k-1}$ því að þegar talan 1 hefur þegar verið valin er eftir að velja $k-1$ stök af þeim stökum sem eru í menginu $\{2, \ldots, n\}$ og fjöldi þeirra staka er $n-1$. Við bætast þau hlutmengi sem innihalda ekki stakið 1. Fjöldi þeirra er $\binom{n-1}{k}$, því að við eigum að velja öll k stökin úr menginu $\{2, \ldots, n\}$. Sérhvert hlutmengi í $\{1, 2, \ldots, n\}$ er af annarri hvorri gerðinni, en ekkert hlutmengi er af báðum gerðum; því fæst jafnan

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$ ∎

Þríhyrningur Pascals er myndræn túlkun á niðurstöðu þessarar setningar. Stökunum $\binom{n}{k}$ er raðað í óendanlegan þríhyrning sem byrjar svona:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
 & & & & & \cdots & & & & &
\end{array}$$

Sérhvert stak í þríhyrningnum er summa stakanna tveggja sem liggja næst því í línunni fyrir ofan. Þegar við reiknum út stökin í þríhyrningnum líta fyrstu línurnar svona út:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \cdots & & & & &
\end{array}
$$

6.3 Setning. (Tvíliðusetningin) *Fyrir sérhverja náttúrlega tölu n gildir*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

SÖNNUN: Lítum fyrst á talningarfræðilega sönnun. Við margföldum upp úr svigunum í margfeldinu

$$(x+y)^n = \overbrace{(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}^{n \text{ þættir}}$$

Það er ljóst að við fáum summu af gerðinni

$$\sum_{k=0}^{n} c_k x^{n-k} y^k.$$

Stuðullinn c_k er jafn fjölda vega til að velja „x“ úr $n-k$ þáttum, en „y“ úr hinum k þáttunum sem eru eftir. Þetta má auðvitað gera á $\binom{n}{k}$ vegu.

Algebruleg sönnun byggist á þrepun. Það er ljóst að reglan gildir fyrir $n=1$. Við gerum ráð fyrir að reglan gildi fyrir n og leiðum út regluna fyrir $n+1$. Reynið að rökstyðja hvert skref í reikningnum. Við höfum að

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \\
&= (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k \\
&= x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k + y\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} + y^{n+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} y^k + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] x^{n+1-k} y^k + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k + y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

6.4 Setning. *Fyrir sérhverja náttúrlega tölu n gildir*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

SÖNNUN: Við höfum að

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Þessi regla hefur einnig talningarfræðilega sönnun. Talan $\binom{n}{k}$ er fjöldi hlutmengja með k stök í menginu $\{1, \dots, n\}$. En summan $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ er þá fjöldi allra hlutmengja þessa mengis að meðtöldu menginu sjálfu og tóma menginu. En sá fjöldi er 2^n. $\blacksquare$

Einn kostur talningarfræðilegrar sönnunnar á tvíliðusetningunni er sá að auðvelt er að alhæfa hana. Lítum á *þríliðusetninguna*.

6.5 Setning. (Þríliðusetning) *Fyrir sérhverja náttúrlega tölu n gildir*

$$(x+y+z)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} x^i y^j z^k.$$

Takið eftir því að í summunni taka i, j og k öll gildi (úr mengi náttúrlegu talnanna) sem uppfylla $i+j+k=n$. Það er skemmtileg þraut að athuga hversu mörg þessi gildi séu.

SÖNNUN: Það er ljóst að $(x+y+z)^n$ er unnt að setja fram sem summu

$$(x+y+z)^n = \sum_{i+j+k=n} c_{i,j,k} x^i y^j z^k.$$

Eina spurningin er: Hverjir eru stuðlarnir $c_{i,j,k}$? Nú er $(x+y+z)^n$ margfeldi n þátta sem hver um sig er $x+y+z$. Stuðullinn $c_{i,j,k}$ segir á hve marga vegu má velja x úr i þáttum, y úr j af þeim þáttum sem þá eru eftir og að lokum z úr þeim k þáttum sem þá eru eftir. Til að reikna $c_{i,j,k}$ beitum við margföldunarreglunni. Við getum valið x úr i þáttum á $\binom{n}{i}$ vegu. Að því loknu eigum við að velja y úr j af þeim $n-i$ þáttum sem eru eftir. Þetta getum við gert á $\binom{n-i}{j}$ vegu. Að því loknu eigum við að velja z úr k af þeim þáttum sem eru eftir, en það er einungis hægt að gera á einn veg því að aðeins k þættir eru eftir. Heildarfjöldinn er því

$$\binom{n}{i}\binom{n-i}{j} = \frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{(n-i)!}{j!(n-i-j)!} = \frac{n!}{i!j!k!}. \qquad \blacksquare$$

Nú er ekki erfitt að skrifa niður fjórliðusetninguna, en við skulum taka stærra stökk og skrifa strax niður *fleirliðusetninguna*.

6.6 Setning. (Fleirliðusetning) *Fyrir sérhverja náttúrlega tölu n gildir*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_m=n} \frac{n!}{i_1!i_2!\ldots i_m!} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_m^{i_m}. \qquad \blacksquare$$

Við gefum ekki sönnun á þessari setningu. Hún er frekar augljós alhæfing á þeirri sönnun sem við gáfum á þríliðasetningunni, svo að óhætt ætti að vera að eftirláta hana lesandanum.

Stuðullinn $\frac{n!}{i_1!i_2!\ldots i_m!}$ er stundum skrifaður

$$\binom{n}{i_1, i_2, \cdots, i_m}$$

og er kallaður *fleirliðustuðull*. Hann segir á hver marga vegu má velja fyrst i_1 stök úr menginu $\{1, \ldots, n\}$, að því loknu að velja i_2 stök úr þeim sem eftir eru, o. s. frv. Þetta er ekki það sama og skipta menginu $\{1, \ldots, n\}$ í m hlutmengi þannig að einn hluti hafi i_1 stök, einn hafi i_2 stök o. s. frv., því að í slíkri skiptingu skiptir röð hlutmengjanna ekki máli. (Það getur farið eftir orðalagi hverju sinni hvað átt er við, sbr. eftirfarandi tvö dæmi: Á hversu marga vegu er hægt að skipta tuttugu og tveggja manna hópi í tvö fótboltalið til þess að leika hvort á móti öðru? Á hversu marga vegu er hægt að skipta tuttugu og tveggja manna hópi í fótboltalið og krikketlið? Svarið er ekki það sama.)

7 Umraðanir með endurtekningum

Í grein 4 skilgreindum við umröðun á k af n stökum sem endanlega runu $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ af *ólíkum* stökum $x_1, x_2, \ldots, x_k$ úr gefnu mengi A sem hefur n stök. Við sáum að fjöldi þeirra er $P(n,k) = n!/(n-k)!$.

Ef við krefjumst þess ekki að stökin $x_1, x_2, \ldots, x_k$ séu ólík, með öðrum orðum leyfum við *endurtekningar* í rununni, þá er svarið einnig einfalt:

Fjöldinn er n^k, því að við getum valið fyrsta stakið á n vegu, annað stakið getum við líka valið á n vegu og svo framvegis. Samkvæmt margföldunarreglunni er því fjöldinn af endanlegum runum $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, þar sem stökin $x_1, x_2, \ldots, x_k$ eru ekki nauðsynlega ólík en valin úr mengi A sem hefur n stök, jafn

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}_{n \text{ sinnum}} = n^k.$$

En hver verður fjöldinn ef gefið er fyrirfram hversu oft hvert stak úr A á að koma fyrir í rununni? Fleirliðustuðlarnir hjálpa okkur að svara þeirri spurning.

7.1 Setning. *Látum E vera mengi þannig að $|E| = k$ og $r_1, r_2, \ldots, r_n$ vera náttúrlegar tölur þannig að $r_1 + r_2 + \cdots + r_n = k$. Þá má skipta menginu E í hlutmengi $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sem eru sundurlæg tvö og tvö og þannig að $|E_j| = r_j$ fyrir öll $j = 1, 2, \ldots, n$ á*

$$\binom{k}{r_1, r_2, \ldots, r_n} = \frac{k!}{r_1! r_2! \cdots r_n!}$$

vegu.

SÖNNUN: Við byrjum á að velja hvaða r_1 stök úr E eiga að lenda í menginu E_1; það getum við gert á $\binom{k}{r_1}$ vegu. Næst veljum við r_2 stök sem eiga að lenda í E_2. Þau eigum við að velja úr þeim $k - r_1$ stökum sem eru ekki í E_1 og því má gera það á $\binom{k-1}{r_2}$ vegu. Stökin sem eiga að lenda í E_3 verður að velja úr þeim $k - r_1 - r_2$ stökum sem eru hvorki í E_1 né í E_2 og það má gera á $\binom{k-r_1-r_2}{r_3}$ vegu og svo framvegis. Samkvæmt margföldunarreglunni verður fjöldi allra slíkra skiptinga jafn

$$\frac{k!}{r_1!(k-r_1)!} \cdot \frac{(k-r_1)!}{r_2!(k-r_1-r_2)!} \cdots \frac{(k-r_1-\cdots-r_{n-1})!}{r_n!0!}.$$

En seinni þátturinn í hverjum nefnara styttist út á móti teljaranum í næsta broti á eftir, svo að útkoman er

$$\frac{k!}{r_1! r_2! \cdots r_n!}. \qquad \blacksquare$$

7.2 Athugasemd. Takið eftir að *röð* mengjanna $E_1, E_2, \ldots, E_n$ skiptir máli. Athugum dæmið þegar $k = 2$, $n = 2$ og $r_1 = r_2 = 1$. Þá er spurt á hve marga vegu má skipta tveggja staka mengi $E = \{e_1, e_2\}$ í tvö sundurlæg mengi E_1 og E_2 sem hvort um sig hefur eitt stak. Við fyrstu sýn mætti ætla að þetta væri aðeins unnt á einn veg; hinsvegar gefur setningin okkur svarið $\frac{2!}{1!1!} = 2$. En þar sem röð mengjanna E_1, E_2 er tiltekin sýnir nánari umhugsun líka að skiptingarnar eru tvær: Við getum annaðhvort tekið $E_1 = \{e_1\}$ og $E_2 = \{e_2\}$, eða við getum tekið $E_1 = \{e_2\}$ og $E_2 = \{e_1\}$.

Við gætum líka spurt á hve marga vegu má skipta menginu E í n hlutmengi með stakafjölda $r_1, r_2, \ldots, r_n$ þannig að röð hlutmengjanna skipti ekki máli; með öðrum orðum lítum við þá á tvær skiptingar sem sömu skiptinguna ef þær gefa okkur sömu hlutmengin, en hugsanlega í ólíkri röð. Þessi spurning er hinsvegar verulega flóknari en hin og ekki er unnt að svara henni hér.

7.3 Setning. *Látum A vera mengi þannig að $|A| = n$ og skrifum $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Látum $r_1, r_2, \ldots, r_n$ vera náttúrlegar tölur þannig að $r_1 + r_2 + \cdots + r_n = k$. Þá er fjöldinn af öllum endanlegum runum $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ af stökum úr A þannig að stakið a_j komi nákvæmlega r_j sinnum fyrir í rununni fyrir öll $j = 1, 2, \ldots, n$ gefinn með fleirliðustuðlinum*

$$\binom{k}{r_1, r_2, \ldots, r_n}$$

SÖNNUN: Við hugsum okkur að við búum rununa $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ til með eftirfarandi hætti: Við teiknum k reiti í röð. Við viljum nú skrifa a_1 í nákvæmlega r_1 af þessum reitum, a_2 í nákvæmlega r_2 reiti og svo framvegis. En þetta jafngildir því að skipta mengi reitanna í n hlutmengi $E_1, E_2, \ldots, E_n$ þannig að $|E_j| = r_j$ fyrir öll $j = 1, 2, \ldots, n$ og niðurstaðan er nú bein afleiðing af síðustu setningu. ■

7.4 Dæmi. Hve mörg orð má búa til með því að umraða stöfunum í orðinu „MISSISSIPPI“?

LAUSN: Hér er spurt hve margar ellefu bókstafa runur má búa til úr bókstöfunum „M“, „I“, „S“ og „P“ þannig að „M“ komi nákvæmlega einu sinni fyrir í rununni, „I” nákvæmlega fjórum sinnum, „S“ nákvæmlega fjórum sinnum og „P“ nákvæmlega tvisvar sinnum. Samkvæmt síðustu setningu er svarið

$$\frac{11!}{1!4!4!2!} = 34.650.$$

8 Samantektir með endurtekningum

Í grein 5 sáum við: Ef gefið er mengi A þannig að $|A| = n$, þá er fjöldi k staka hlutmengja $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ í A jafn $\binom{n}{k}$. En hvað gerist ef við tilgreinum fyrir hvert stak x_j að við viljum r_j eintök af því? Slík spurning gæti til dæmis komið upp í konfektverksmiðju sem framleiðir sex tegundir af konfektmolum og pakkar þeim tíu saman í kassa. Á hve marga vegu er hægt að setja saman konfektkassa? (Hér eru tveir konfektkassar eins nákvæmlega þegar þeir hafa sama fjölda af hverri gerð mola, en hvernig við röðum molunum í kassana skiptir engu máli.)

Spyrjum nú almennt: Látum E vera endanlegt mengi þannig að $|E| = n$, og látum k vera náttúrlega tölu. Á hversu marga vegu getum við tilgreint samtals k stök úr menginu ef við megum nefna sama stakið oftar en einu sinni? Það er engin takmörkun að gera ráð fyrir að E sé mengið $\{1, 2, \ldots, n\}$ og við getum því endurorðað spurninguna aftur þannig:

8.1 Spurning. Látum n og k vera náttúrlegar tölur, $n \geq 1$. Á hve marga vegu má skrifa k sem summu

$$k = r_1 + r_2 + \cdots + r_n$$

af náttúrlegum tölum $r_1, r_2, \ldots, r_n$?

SVAR: Skrifum k krossa í röð:

$$\times \quad \times \quad \times \quad \times \quad \cdots \quad \times$$

Skiptum þessum krossum í n hópa með því að aðgreina þá með lóðréttum strikum, til dæmis þannig:

$$\times \mid \times \quad \times \quad \times \mid\mid \times \quad \cdots \quad \times \quad \times \mid$$

Við þurfum $n - 1$ strik. Hverri slíkri skiptingu samsvarar summa $k = r_1 + r_2 + \cdots + r_n$ sem fæst þanngi: r_1 er fjöldi krossa framan við fyrsta strikið, r_2 er fjöldi krossa milli fyrsta og annars striks, r_3 er fjöldi krossa milli annars og þriðja striks og svo framvegis; að lokum er r_n fjöldi krossa aftan við síðasta strikið. Þar sem leyfilegt er að einhverjar af tölunum r_k séu núll er ekkert því til fyrirstöðu að tvö eða fleiri strik standi saman, og strik mega standa fremst eða aftast í rununni. Við sjáum því að fjöldi framsetninga $k = r_1 + r_2 + \cdots + r_n$ á tölunni k er jafn fjölda allra runa af krossum og strikum þar sem fjöldi krossanna er k og fjöldi strikanna er $n-1$. Slíka runu getum við búið til með því að teikna $k + n - 1$ reit í röð, velja síðan k af þessum reitum og setja krossa í þá, en strik í alla hina. Fjöldinn af rununum er því jafn fjölda hlutmengja af stærð k í mengi af stærð $k + n - 1$ eða

$$\binom{k+n-1}{k}.$$

Niðurstöðuna má einnig túlka þannig: Talan $\binom{k+n-1}{k}$ segir okkur á hve marga vegu má dreifa k kúlum sem eru allar eins í n kassa.

8.2 Dæmi. Í konfektbúð má kaupa konfekt í lausasölu. Þar fást 6 tegundir af konfekti. Á hve marga vegu má velja 10 mola?

LAUSN: Þetta jafngildir því að skrifa 10 sem summu af 6 tölum. Svarið er því

$$\binom{6+10-1}{10} = \binom{15}{10} = 3.003.$$

8.3 Dæmi. Á hve marga vegu má velja sér 5 kúlur ef kúlurnar eru í 4 ólíkum litum en að öðru leyti eins?

Lausn:

$$\binom{5+4-1}{5} = \binom{8}{5} = 56.$$

8.4 Dæmi. Hve margar tölur milli 0 og 999.999 hafa þversummuna 5?

Lausn: Skrifum slíka tölu í tugakerfi sem $a_5a_4a_3a_2a_1a_0$ þar sem $a_j \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Spurningin er því jafngild því á hve marga vegu má skrifa töluna 5 sem summu

$$5 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

af náttúrlegum tölum að viðbættum skilyrðunum $0 \le a_j \le 9$. Þar sem summan má aðeins verða 5 er þessum viðbótarskilyrðum hinsvegar sjálfkrafa fullnægt, og svarið verður

$$\binom{6+5-1}{5} = \binom{10}{5} = 252.$$

8.5 Dæmi. Á hve marga vegu má skrifa náttúrlega tölu k sem summu

$$k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

af n náttúrlegum tölum sem eru *stærri* en 0?

Lausn: Þetta jafngildir því að skrifa

$$k - n = (x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \cdots + (x_n - 1) = y_1 + y_2 + \cdots + y_n,$$

þar sem tölurnar $y_j = x_j - 1$ eru hvaða náttúrlegar tölur sem er, hugsanlega núll. Svarið er því

$$\binom{n + (k-n) - 1}{k-n} = \binom{k-1}{k-n} = \binom{k-1}{n-1},$$

því að $k - 1 - (k - n) = n - 1$.