Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2016–2017
Úrslitakeppni - lausnir

Dæmi 1
A4 blaði er skipt í sex hluta eða sextán hluta. Einhverjum einum hlutanum er svo skipt í sex eða sextán hluta. Þetta ferli má endurtaka aftur og aftur. Er mögulegt að fjöldi blaðhlutanna, að lokinni skiptingu, sé á einhverju stigi jafn 2017?

Dæmi 2
Gutti er grallari. Hann deilir þegar hann á að margfalda og hann leggur saman þegar hann á að draga frá. Eitt sinn var Gutti beðinn um að draga töluna 60 frá margfeldi tveggja náttúrlegra talna. Fyrir tilviljun fékk Gutti rétta útkomu. Hver gæti sú útkoma hafa verið? Finnið alla möguleika.

Dæmi 3
Andri Dagur og Björt Nótt sitja við venjulegt skákborð (8×8). Neðst í vinstra horninu stendur einn hrókur. Þau skiptast á og skulu í hverjum leik færa hrókinn á annan reit eins langt og þau vilja fyrir ofan eða til hægri við reitinn sem hann stendur á. Spilið endar þegar hrókurinn er kominn efst í hægra hornið. Andri byrjar. Ef það að koma hróknum efst í hægra hornið markar: a) sigur b) tap
hvort þeirra á þá, í hvoru tilviki um sig, örugga vinningsleið?

Dæmi 4
Finnið allar rauntölur x og y þannig að

$$x^2 + x = y^3 - y$$
$$x^3 - x = y^2 + y$$

Dæmi 5
Þríhyrningur ABC hefur hliðarlengdir $AC = 31$ og $AB = 22$. Miðlínurnar CC' og BB' eru hornréttar hvor á aðra. Finnið lengd BC.

Miðlína ákvarðast af hornpunkti þríhyrnings og miðpunkti mótlægrar hliðar.

Dæmi 6
Finnið gildi summunnar $xy + xz + yz$ ef gefið er að

$$x^2 + xy + y^2 = 1$$
$$x^2 + xz + z^2 = 2$$
$$y^2 + yz + z^2 = 3$$

Hér nægir að finna eina lausn.

Dæmi 1

A4 blaði er skipt í sex hluta eða sextán hluta. Einhverjum einum hlutanum er svo skipt í sex eða sextán hluta. Þetta ferli má endurtaka aftur og aftur. Er mögulegt að fjöldi blaðhlutanna, að lokinni skiptingu, sé á einhverju stigi jafn 2017?

Lausn

Í hvert sinn sem blaði (eða blaðhluta) er skipt þá eykst fjöldi hluta um fimm ef skipt er í sex hluta en um fimmtán ef skipt er í sextán hluta. Heildarfjöldi hluta að lokinni hverri skiptingu er því $1 + 5n + 15m$ þar sem n er fjöldi skiptinga í sex hluta og m er fjöldi skiptinga í sextán hluta. Könnum hvort velja megi m og n þannig að $1 + 5n + 15m = 2017$ gildi. Þá verður $5n + 15m = 2016$ sem er ómögulegt því 2016 er ekki heiltölumargfeldi af 5. Fjöldi blaðhlutanna mun því ekki á neinu stigi verða jafn 2017.

Dæmi 2

Gutti er grallari. Hann deilir þegar hann á að margfalda og hann leggur saman þegar hann á að draga frá. Eitt sinn var Gutti beðinn um að draga töluna 60 frá margfeldi tveggja náttúrlegra talna. Fyrir tilviljun fékk Gutti rétta útkomu. Hver gæti sú útkoma hafa verið? Finnið alla möguleika.

Lausn

Ef náttúrlegu tölurnar eru a og b þá var beðið um töluna $ab - 60$ en Gutti reiknar $\frac{a}{b} + 60$. Þar sem Gutti fékk rétta útkomu þá er

$$ab - 60 = \frac{a}{b} + 60 \tag{1}$$

og því er ljóst að $a \neq 0$, $b \neq 1$ og $\frac{a}{b}$ því náttúrleg tala, k. Jöfnuna má þá umrita á formið

$$ab - \frac{a}{b} = 120 \quad \text{eða} \quad \frac{a}{b}(b^2 - 1) = 120 \quad \text{svo} \quad k(b-1)(b+1) = 120$$

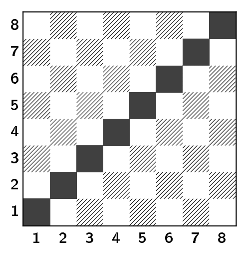
Mengið $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120\}$ geymir jákvæða heiltöluþætti tölunnar $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Því er ljóst að möguleg gildi á b eru $2, 3, 4, 5, 11$. Fyrir hvert $b \in \{2, 3, 4, 5, 11\}$ reiknum við $a = bk$ og fáum möguleg pör (a, b) sem uppfylla jöfnu (1): $\{(2, 80), (3, 45), (4, 32), (5, 25), (11, 11)\}$. Gutti gæti því hafa fengið útkomuna $100, 75, 68, 65$ eða 61.

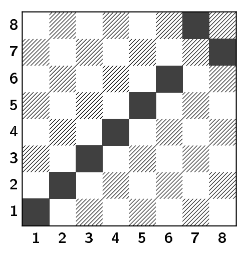
Dæmi 3

Andri Dagur og Björt Nótt sitja við venjulegt skákborð (8×8). Neðst í vinstra horninu stendur einn hrókur. Þau skiptast á og skulu í hverjum leik færa hrókinn á annan reit eins langt og þau vilja fyrir ofan eða til hægri við reitinn sem hann stendur á. Spilið endar þegar hrókurinn er kominn efst í hægra hornið. Andri byrjar. Ef það að koma hróknum efst í hægra hornið markar: a) sigur b) tap

hvort þeirra á þá, í hvoru tilviki um sig, örugga vinningsleið?

Lausn





Í tilviki a) þá hefur Björt vinningsleið af því að hún getur ávallt svarað leik Andra með því að leika hróknum á hornalínureit (i, i). Í tilviki b) þá hefur Björt nánast sömu vinningsleið og áður nema hvað lokatakmark hennar er að koma hróknum á reit $(7, 8)$ eða $(8, 7)$. Geti hún ekki leikið á þá reiti þá leikur hún á einhvern hornalínureitanna (i, i) með

$i \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Því skiptir ekki máli hvort um a) eða b) er að ræða; Björt sigrar alltaf.

Dæmi 4

Finnið allar rauntölulausnir x og y þannig að

$$
\begin{aligned}
x^2 + x &= y^3 - y \\
x^3 - x &= y^2 + y
\end{aligned}
$$

Lausn

Skoðum tilfellin þegar $x = 0$ og $x = -1$. Þau gefa $y \in \{0, -1\}$ eða lausnirnar $(0, 0)$, $(0, -1)$, $(-1, 0)$ og $(-1, -1)$. Þáttum nú jöfnurnar og númerum þær

$$
\begin{aligned}
x(x + 1) &= y(y + 1)(y - 1) && (1) \\
y(y + 1) &= x(x + 1)(x - 1) && (2)
\end{aligned}
$$

Setjum því næst (2) inn í (1):

$$x(x + 1) = x(x + 1)(x - 1)(y - 1)$$

Gerum ráð fyrir að $x \notin \{0, -1\}$, megum þá stytta $x(x + 1)$ út báðum megin og fáum

$$1 = (y - 1)(x - 1) \qquad (3)$$

svo $x \neq 1$ og $y \neq 1$. Einangrum y og fáum

$$y = 1 + \frac{1}{x - 1} = \frac{x}{x - 1}$$

og því er $y + 1 = \frac{2x-1}{x-1}$. Setjum þetta inn fyrir $y(y + 1)$ í jöfnu (2) og fáum

$$\frac{x}{x - 1} \cdot \frac{2x - 1}{x - 1} = x(x - 1)(x + 1)$$

Það jafngildir

$$
\begin{aligned}
& 2x - 1 = (x - 1)^3(x + 1) \\
\Leftrightarrow\ & 2x - 1 = (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 1) \\
\Leftrightarrow\ & 2x - 1 = x^4 - 2x^3 + x^2 - x^2 + 2x - 1
\end{aligned}
$$

og því $x^4 - 2x^3 = 0$ sem gefur $x = 2$ af því að $x \neq 0$. Setjum þetta inn í (3) og fáum að $y = 2$ svo fimmta lausnin er $(2, 2)$. Allar lausnirnar eru þá $(0, 0), (0, -1), (-1, 0), (-1, -1)$ og $(2, 2)$.

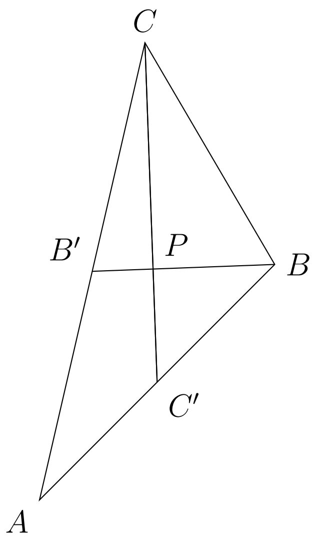
Dæmi 5

Þríhyrningur ABC hefur hliðarlengdir $AC = 31$ og $AB = 22$. Miðlínurnar CC' og BB' eru hornréttar hvor á aðra. Finnið lengd BC.

Miðlína ákvarðast af hornpunkti þríhyrnings og miðpunkti mótlægrar hliðar.

Lausn

Teiknum mynd:



Köllum skurðpunkt miðlínanna P.

(i) Notum að P skiptir miðlínum í hlutföllunum $1:2$. Ef $PC' = x$ þá er $PC = 2x$ og ef $PB' = y$ þá er $PB = 2y$. Nú gefur regla Pýþagórasar að

$$y^2 + (2x)^2 = \left(\frac{31}{2}\right)^2 \quad \text{og} \quad x^2 + (2y)^2 = 11^2$$

Því fæst $5y^2 + 5x^2 = \left(\frac{31}{2}\right)^2 + 11^2$ og því fæst:

$$BC = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2} = \sqrt{\frac{4}{5}\left[\left(\frac{31}{2}\right)^2 + 11^2\right]} = 17$$

(ii) Notum að $AC'B'$ og ABC eru einslaga og því $BC = 2B'C'$.

Nú er $B'P^2 + PC^2 = (31/2)^2$ og $PC'^2 + PB^2 = 11^2$. Þá fæst:

$$B'P^2 + PC^2 + PC'^2 + PB^2 = (31/2)^2 + 11^2$$
$$(B'P^2 + PC'^2) + (PC^2 + PB^2) = (31/2)^2 + 11^2$$
$$CB^2/4 + CB^2 = (31/2)^2 + 11^2 \quad \text{, svo} \quad CB = \sqrt{\frac{4}{5}\left[\left(\frac{31}{2}\right)^2 + 11^2\right]} = 17$$

Dæmi 6

Finnið gildi summunnar $xy + xz + yz$ ef gefið er að

$$x^2 + xy + y^2 = 1$$
$$x^2 + xz + z^2 = 2$$
$$y^2 + yz + z^2 = 3$$

Hér nægir að finna eina lausn.

Lausn (algebruleg)

Ef við drögum fyrstu jöfnununa frá annarri fæst

$$xz - xy + z^2 - y^2 = 1$$

og þáttun gefur að $x(z-y) + (z+y)(z-y) = (z-y)(x+y+z)$ svo

$$1 = (z-y)(x+y+z)$$

Á sama hátt fæst, ef önnur jafnan er degin frá þeirri þriðju, að

$$1 = (y-x)(x+y+z).$$

Látum $k = z - y = y - x$ þá fæst $z = y + k$ og $x = y - k$ og jöfnurnar hér á undan gefa $1 = k(3y)$ svo $y = \frac{1}{3k}$. Af upphaflegu jöfnunum verður þá miðjafnan

$$\begin{aligned} 2 &= x^2 + xz + z^2 = (y-k)^2 + (y-k)(y+k) + (y+k)^2 \\ &= y^2 - 2ky + k^2 + y^2 - k^2 + y^2 + 2ky + k^2 \\ &= 3y^2 + k^2. \end{aligned} \tag{*}$$

Ef við setjum $y = \frac{1}{3k}$ inn í (*) fæst

$$2 = 3\left(\frac{1}{3k}\right)^2 + k^2 \Leftrightarrow 3k^4 - 6k^2 + 1 = 0$$

sem er annars stigs jafna í k^2 og hefur lausnirnar

$$k^2 = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Við fáum þá að

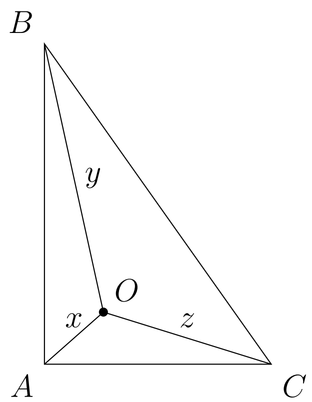
$$\begin{aligned} xy + xz + yz &= (y-k)y + (y-k)(y+k) + y(y+k) = y^2 - ky + y^2 - k^2 + y^2 + ky \\ &= 3y^2 - k^2 = 3y^2 + k^2 - 2k^2 \overset{(*)}{=} 2 - 2k^2 = 2 - 2\left(1 \pm \frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \pm\frac{2\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

Lausn (rúmfræðileg)

Samkvæmt Kósínusreglu gildir að ef AOB er þríhyrningur með $\angle A = 120°$, $OA = x$ og $OB = y$ þá er $x^2 + xy + y^2 = AB^2$.

Gerum ráð fyrir að $x, y, z > 0$. Frá punkti O eru dregin þrjú strik, OA, OB og OC þannig að

- lengdir strikanna eru x, y og z;
- horn milli tveggja strika er $120°$



Þríhyrningurinn ABC hefur þá hliðarlengdir 1, $\sqrt{2}$ og $\sqrt{3}$. Þríhyrningurinn er því rétthyrndur og hefur flatarmál $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Flatarmál þríhyrningsins má einnig reikna sem summu flatarmála þríhyrninganna þriggja OAB, OBC og OAC. Því fæst

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}xy\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}yz\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}xz\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(xy + yz + xz)$$

svo $xy + yz + xz = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.