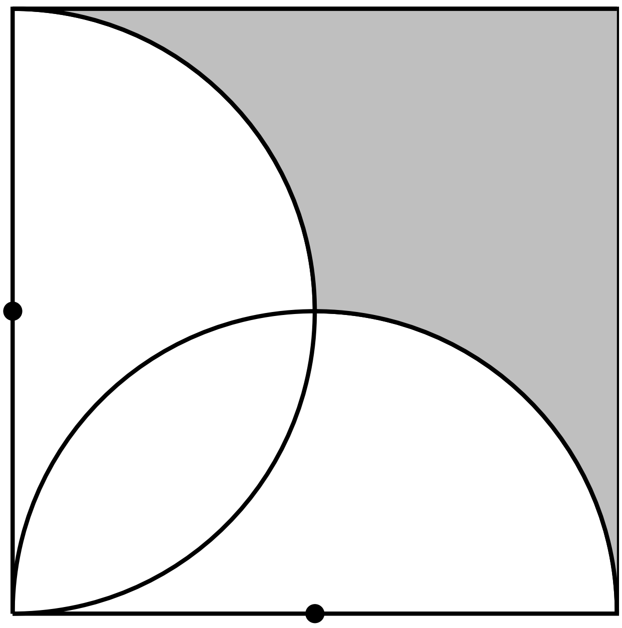
Íslenska stærðfræðafélagið
Félag raungreinakennara í framhaldsskólum

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2014–2015

Svör og lausnir

Efra stig



Landsnet styrkir Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema

Fyrsti hluti

Í þessum hluta eru tíu spurningar. Hver spurning er þriggja stiga virði. Setjið kross framan við rétt svar. Fyrir rangt svar er dregið eitt stig frá.

1. Ef $\dfrac{1/w + 1/z}{1/w - 1/z} = 2014$ þá er $\dfrac{w+z}{w-z}$ jafnt og

☒ -2014 ☐ $\dfrac{-1}{2014}$ ☐ 2014 ☐ $\dfrac{1}{2014}$

Skýring: $2014 = \dfrac{(1/w + 1/z)\cdot wz}{(1/w - 1/z)\cdot wz} = \dfrac{w+z}{z-w}$ og því er $\dfrac{w+z}{w-z} = -2014$.

2. Jón gekk framhjá fjórum húsum í röð, í sínum lit hvert. Hann gekk framhjá appelsínugula húsinu á undan rauða húsinu. Hann gekk framhjá bláa húsinu á undan gula húsinu. Bláa húsið er ekki við hliðina á gula húsinu. Á hve marga vegu getur röð húsanna verið?

☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5

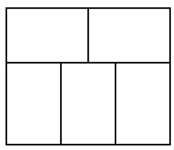
Skýring: Ef staðsetningar bláa og gula húsins eru þekktar ákvarðast staðsetningar appelsínugula og rauða húsins ótvírætt. Bláa húsið er á undan því gula og þau eru ekki hlið við hlið svo mögulegar staðsetningar fyrir þau eru fyrsta og þriðja, fyrsta og fjórða og að síðustu annað og fjórða.

3. Gefið er að x og y eru rauntölur, hvorug núll og $x \neq y$. Hvert er gildið á xy ef $x + \dfrac{2}{x} = y + \dfrac{2}{y}$?

☐ $\dfrac{1}{4}$ ☐ 1 ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☒ 2

Skýring: Ef $x + \dfrac{2}{x} = y + \dfrac{2}{y}$ þá er $x - y = \dfrac{2}{y} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2(x-y)}{xy}$. Nú er $x - y \neq 0$ og því er $1 = \dfrac{2}{xy}$ sem þýðir að $xy = 2$.

4. Rétthyrningur er samsettur úr 5 eins rétthyrningum eins og myndin sýnir. Hvert er flatarmál stóra rétthyrningsins ef vitað er að ummál hvers lítils rétthyrnings er 20 m?



☐ $72\ \mathrm{m}^2$ ☐ $112\ \mathrm{m}^2$ ☒ $120\ \mathrm{m}^2$ ☐ $140\ \mathrm{m}^2$

Skýring: Táknum skammhlið lítils rétthyrnings með x og langhlið með y. Þá er $2x + 2y = 20\,\mathrm{m}$. Einnig sést á mynd að $2y = 3x$. Séu þessar tvær jöfnur leystar saman fæst að $x = 4\,\mathrm{m}$ og $y = 6\,\mathrm{m}$. Flatarmál stóra rétthyrningsins er þá $(x+y)\cdot 2y = (x+y)\cdot 3x = 10\,\mathrm{m}\cdot 12\,\mathrm{m} = 120\,\mathrm{m}^2$.

5. Í sendingu af kössum er einn fjórði af kössunum tómur. Opnaður er einn fjórði hluti kassanna og einn fimmti þeirra er ekki tómur. Hve stór hluti óopnuðu kassanna er tómur?

☐ $\frac{4}{15}$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☒ $\frac{1}{15}$ ☐ $\frac{1}{16}$

Skýring: Fjórir fimmtu hlutar opnuðu kassanna eru tómir. Það gerir $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$ hluta allrar sendingarinnar. Ef x er sá hluti óopnuðu kassanna sem er tómur þá gerir það $x \cdot \frac{3}{4}$ hluta allrar sendingar. Þá er $\frac{1}{5} + x \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ og því $x = \frac{1}{15}$.

6. Jafnan $x^2 - 7x + c = 0$ hefur lausnir a og b. Finnið gildið á c ef $a^2 + b^2 = 81$.

☐ -12 ☐ -15 ☒ -16 ☐ -18

Skýring: Þar sem a og b eru lausnir jöfnunnar gildir að $a + b = 7$ og $ab = c$. Þá má reikna: $81 = a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 7^2 - 2c$. Svo $c = -16$.

7. Ylfa æfir hlaup og ætlar að hlaupa fjóra hringi á meðalhraðanum 16 km/klst. Meðalhraði Ylfu reynist vera 15 km/klst fyrstu þrjá hringina. Hver þarf meðalhraði Ylfu á fjórða hring að vera til að hún nái markmiðinu?

☐ 18 ☐ 19 ☒ 20 ☐ 21

Skýring: Ef hringurinn er af lengd L km, þá ætlar Ylfa að hlaupa í $4L/16 = L/4$ klst. Það tekur hana $3L/15 = L/5$ klst. að hlaupa fyrstu þrjá hringina svo ef meðalhraði Ylfu á fjórða hring er V þá verður $L/V = L/4 - L/5 = L/20$.

8. Hversu margar þriggja stafa tölur abc eru þannig að $a > b > c$ og ein talnanna er 5?

☐ 30 ☒ 36 ☐ 46 ☐ 50

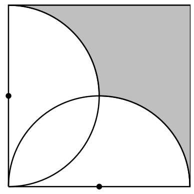
Skýring: Ef $a = 5$ þá eru b og c valdar úr menginu $\{4, 3, 2, 1, 0\}$ og þar sem $b > c$ má velja þessar tvær tölur á $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ eða $\binom{5}{2}$ vegu. Ef $b = 5$ þá má velja a úr menginu $\{9, 8, 7, 6\}$ og c úr menginu $\{4, 3, 2, 1, 0\}$ og eru valmöguleikarnir $4 \cdot 5 = 20$ alls. Loks, ef $c = 5$ þá eru a og b valdar úr menginu $\{9, 8, 7, 6\}$ og þar sem $a > b$ má velja tölurnar á $3 + 2 + 1 = 6$ eða $\binom{4}{2}$ vegu. Heildarfjöldi möguleika er þá $10 + 20 + 6 = 36$.

9. Fjórar stelpur, Anna, Bára, Dagný og Elín sungu á tónleikum og aðeins þrjár saman hvert lag. Elín söng í flestum laganna, alls sjö og Anna söng í fæstum laganna, alls fjórum. Hve mörg lög sungu stelpurnar á tónleikunum?

☒ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 11

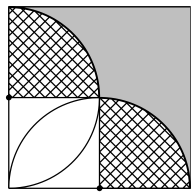
Skýring: Notum upphafsstafi stelpnanna til að tákna fjölda laga sem þær sungu í. Við höfum þá $4 = A < B, C < E = 7$. Þær sungu 3 í hverju lagi svo $A + B + C + D$ er deilanleg með 3 og $21 = 4 + 5 + 5 + 7 \leq A + B + C + D \leq 4 + 6 + 6 + 7 = 23$. Þar með er ljóst að $A + B + C + D = 21$ og lagafjöldinn var $21/3 = 7$.

10. Tveir hálfhringir eru innritaðir í ferning með hliðarlengd 2. Hvert er flatarmál skyggða svæðisins?



☐ 2 ☐ $3 - \pi$ ☐ $\pi - 2$ ☒ $3 - \pi/2$

Skýring: Skástrikuðu hringgeirarnir tveir eru jafnstórir og samanlagt flatarmál þeirra er jafn flatarmáli hálfhrings með geisla (radíus) 1. Óskyggða svæðið er ferningur með hliðarlegnd 1. Umbeðið flatarmál er því $4 - (1 + \pi/2) = 3 - \pi/2$.



Annar hluti

Í þessum hluta eru fimm dæmi og er hvert dæmi sex stiga virði. Tilgreinið svar ykkar á svarlínunni. Ekki þarf að skýra hvernig svarið er fengið. Fyrir rangt svar, ófullkomið svar eða tvírætt svar fæst ekkert stig.

11. Það tekur hóp múrara 5 klst. að ljúka ákveðnu múrverki. Væru þeir einum fleiri tæki sama verk 4 klst. Allir vinna jafn hratt og jafn mikið. Hve langan tíma tæki það einn múrara að ljúka verkinu?

Svar: 20 klst.

Skýring: Ef hópurinn telur N múrara þá gildir að $N \cdot 5 = (N + 1) \cdot 4$, svo $N = 4$. Vinnustundir hópsins eru því 20 klst. Þar sem allir vinna jafn hratt tæki það einn múrara 20 klst. að ljúka verkinu.

12. Tölurnar a, b, c, d og e uppfylla jöfnurnar

$$a + b + 1 = b + c - 2 = c + d + 3 = d + e - 4 = e + a + 5.$$

Hver talnanna fimm er stærst?

Svar: b

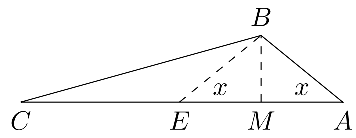
Skýring: Jöfnurnar fjórar leiða til samanburðar:

$$\text{(i) } a + 3 = c, \quad \text{(ii) } b = d + 5, \quad \text{(iii) } c + 7 = e, \quad \text{(iv) } a + 9 = d$$

Til samans sýna (i) og (iii) að $a+10=e$; (ii) og (iv) að $a+14=b$. Þá má raða tölunum

$$a, \quad c=a+3, \quad d=a+9, \quad e=a+10, \quad b=a+14.$$

13. Í þríhyrningi ABC er $AB=5$ og $BC=11$. Valinn er punktur E á hlið AC þannig að $EC=7$ og $EB=AB$. Hver er lengdin á AE?



Svar: $\dfrac{47}{7}$

Skýring: Þar sem þríhyrningurinn ABE er jafnarma þá skiptir hæð hans hlið EA í tvo jafna hluta; $EM=MA=x$. Samkvæmt jöfnu Pyþagórasar er

$$11^2-(7+x)^2=5^2-x^2 \quad \text{svo} \quad 72-14x=25 \quad \text{og því} \quad 2x=47/7.$$

14. Tölurnar m og n eru jákvæðar heiltölur og $m>n$. Þegar m er deilt með n er afgangurinn 24 og þegar $2m$ er deilt með n er afgangurinn 11. Hver er talan n?

Svar: 37

Skýring: Þar sem afgangur er 24 þegar m er deilt með n má rita $m=k_1\cdot n+24$ og $n>24$. Þá er $2m=2k_1\cdot n+48=k_2\cdot n+11$ og því verður að gilda að $n=37$.

15. Hvert er gildið á x ef $\sqrt{x}=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}$?

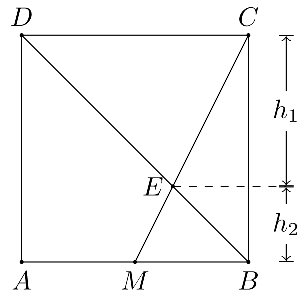
Svar: 4

Skýring: Jöfnuna má umrita á formið $\sqrt{x}=\sqrt{2+\sqrt{x}}$. Þá má álykta að $x=2+\sqrt{x}$ og því $x-\sqrt{x}-2=(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)=0$. Þar sem $\sqrt{x}+1\neq 0$ verður $\sqrt{x}-2=0$ og þar með $x=4$.

Þriðji hluti

Í þessum hluta eru fjögur dæmi og er hvert dæmi tíu stiga virði. Hér ber að rökstyðja svörin. Við mat lausna er tekið tillit til frágangs, nákvæmni og skýrleika í framsetningu. Athugið að hægt er að fá stig fyrir að leysa dæmið að hluta eða koma fram með hugmynd sem er mikilvægt skref að lausn.

16. Punktur M er miðpunktur hliðar AB í ferningi $ABCD$. Punktur E er skurðpunktur hornalínu BD og miðlínu CM. Hvert er hlutfall flatarmáls þríhyrnings BCE og ferhyrnings $ADEM$?



Lausn A: Athugum fyrst, að umbeðið hlutfall er óháð hliðarlengd ferningsins $ABCD$. Lausnin sem hér er sýnd gerir ráð þó fyrir að hliðarlengdin sé einhver óþekkt tala l.

Þríhyrningarnir CDE og BEM eru einslaga og þar sem M er miðpunktur hliðar AB þá eru hliðarlengdir þríhyrninganna í hlutföllunum $1 : 2$. Hæðir þríhyrninganna, h_1 og h_2, eru í sömu hlutföllunum svo $h_1 = 2l/3$ og $h_2 = l/3$. Hornalínan BD skiptir ferningnum í tvo jafna hluta og því má reikna eftirfarandi:

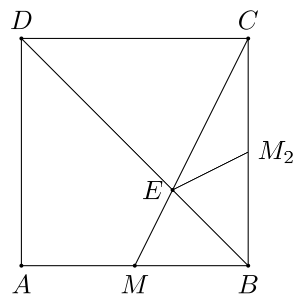
Flatarmál $F(BCE)$: $\quad \dfrac{1}{2}l^2 - F(CDE) = \dfrac{1}{2}l^2 - \dfrac{1}{3}l^2 = \dfrac{1}{6}l^2$

Flatarmál $F(ADEM)$: $\quad \dfrac{1}{2}l^2 - F(BEM) = \dfrac{1}{2}l^2 - \dfrac{1}{12}l^2 = \dfrac{5}{12}l^2$

Þá fæst umbeðið hlutfall $\dfrac{l^2/6}{5l^2/12} = \dfrac{2}{5}$.

Ath: Það er líka hægt að reikna að $h_2 = l/3$ með því að innleiða hnitakerfi og finna skurðpunkt línanna.

Lausn B: *(Álfheiður Edda Sigurðardóttir, MR)*
Þríhyrningurinn ABD spannar hálfan ferning $ABCD$. BCM spannar hálfan helming $ABCD$, þ.e. fjórðung $ABCD$. Sé settur miðpunktur M_2 á hliðina BC kemur fram þríhyrningurinn BEM_2 sem er bæði einslaga og jafnstór BEM. Ennfremur hafa þríhyrningarnir CEM_2 og BEM_2 bæði sömu grunnlínu (BC) og sömu hæð (h_E) og hafa því sama flatarmál. [*Réttara væri að segja að þeir séu með jafnlangar grunnlínur $BM_2 = CM_2$.*]



Samanlagt mynda þeir þríhyrninginn $BCM = \frac{1}{4}ABCD$.
Hver um sig er þá $\frac{1}{12}ABCD$ og $BCE = \frac{1}{6}ABCD$. Nú vill svo skemmtilega til að BEM er akkúrat það sem $ADEM$ vantar uppá til að verða ABD svo $ADEM = ABD - BEM = \frac{1}{2}ABCD - \frac{1}{12}ABCD = \frac{5}{12}ABCD$ svo hlutföllin milli $ADEM$ og BCE eru þá $5 : 2$.

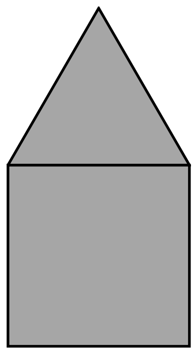
17. Finnið öll pör (a, b) jákvæðra heiltalna sem eru þannig að $a > b$ og mismunur stærðanna $a^2 + b$ og $a + b^2$ er frumtala (prímtala).

Lausn: Þar sem $a > b > 0$ þá er $a^2+b > a+b^2$ svo mismunurinn $(a^2+b)-(a+b^2)$ á að vera frumtala. En

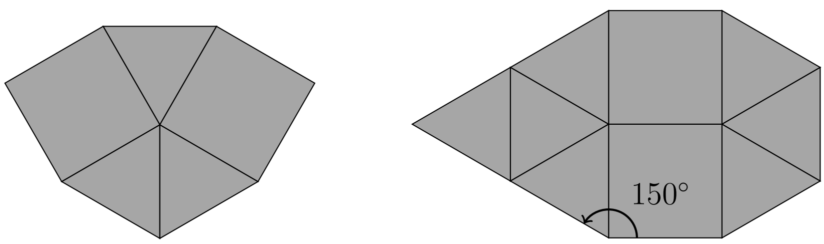
$$\begin{aligned}(a^2 + b) - (a + b^2) &= (a^2 - b^2) - (a - b)\\ &= (a - b)(a + b) - (a - b)\\ &= (a - b)(a + b - 1).\end{aligned}$$

og $(a - b)(a + b - 1)$ er ekki frumtala nema $a - b = 1$ eða $a + b - 1 = 1$. Þar sem $b \geq 1$ þá er $a + b - 1 > a - b$ og því verður að gilda að $a - b = 1$ og þar með $a = b + 1$. Þá er $(a - b)(a + b - 1) = 1 \cdot (a + b - 1) = (b + 1) + b - 1 = 2b$ sem er frumtala aðeins ef $b = 1$.
Það er því aðeins eitt slíkt par jákvæðra heiltalna, $(a, b) = (b + 1, b) = (2, 1)$.

18. Gefnir eru jafnhliða þríhyrningur með hliðarlengd 1 og ferningur með hliðarlengd 1. Hægt er að raða þeim saman þannig að þeir mynda kúptan 5-hyrning eins og myndin sýnir (marghyrningur er kúptur ef allar hornalínur liggja innan marghyrningsins).
Er hægt að raða saman slíkum þríhyrningum og ferningum svo þeir myndi annars vegar kúptan 7-hyrning og hins vegar kúptan 13-hyrning?



Lausn: Það er hægt að raða slíkum þríhyrningum og ferningum saman til að mynda kúptan 7-hyrning; tvö dæmi eru sýnd á mynd.



Þar sem hornasumma kúpts 13-hyrnings er $11 \cdot 180° = 1980°$ þá er alls ekki mögulegt að mynda slíkan marghyrning með því að raða saman ferningi og jafnarma þríhyrningi því eins og sýnt er á mynd til hægri þá er stærsta mögulega horn slíks marghyrnings $150°$ og því er mesta mögulega hornasumman $13 \cdot 150° = 1950°$ sem er of lág.

19. Sannið að ekki sé hægt að finna fjórar jákvæðar heiltölur a, b, c og d þannig að

$$a^2 + b^2 + c^2 - 7d^2 = 0$$

Lausn: Gerum ráð fyrir að hægt sé að finna slíkar tölur a, b, c og d og umritum jöfnuna á formið

$$a^2 + b^2 + c^2 = 7d^2.$$

Athugum að ef allar tölurnar eru sléttar, $a = 2a_1$, $b = 2b_1$, $c = 2c_1$ og $d = 2d_1$, þá mætti stytta sameiginlegan þátt 4 úr jöfnuna og fá sams konar jöfnu

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 7d_1^2$$

og séu tölurnar enn allar sléttar má endurtaka leikinn, þangað til að á endanum fengist lausn sem innihéldi a.m.k. eina oddatölu. Því má gera ráð fyrir að minnst ein af tölunum a, b, c, d sé oddatala.

Notum leifareikning: Almennt gildir fyrir heiltölu m að ef m er slétt, $m = 2k$, þá er $m^2 = 4k^2$ deilanleg með 4. Ef hins vegar m er oddatala, $m = 2k+1$, þá er $m^2 = 4(k^2 + k) + 1$ og er því oddatala með afgang 1 þegar deilt er með 4. Þetta táknum við með því að skrifa $m^2 \equiv 0 \pmod 4$ ef m er slétt og $m^2 \equiv 1 \pmod 4$ ef m er oddatala. Enn fremur sést að einu máli gildir hvort k er oddatala eða slétt tala, $k^2 + k$ er alltaf slétt tala og því hefur $m^2 = 4(k^2 + k) + 1$ afgang 1 ef deilt er með 8, m.ö.o. er $m^2 \equiv 1 \pmod 8$ ef m er oddatala. Nýtum okkur þessar staðreyndir og skiptum í tvö tilfelli:

Ef d er oddatala: Þá er $7d^2$ oddatala og því verður vinstri hliðin líka að vera oddatala og þar með ein eða allar tölurnar a, b og c oddatölur. Ef aðeins ein talnanna þriggja er oddatala þá fást mismunandi leifar fyrir vinstri og hægri hliðar jöfnunnar:

$$a^2 + b^2 + c^2 \equiv 1 \pmod 4 \qquad \text{og} \qquad 7d^2 \equiv 3 \pmod 4$$

sem er ómögulegt. Tölurnar a, b og c verða því allar að vera oddatölur, en þá fæst

$$a^2 + b^2 + c^2 \equiv 3 \pmod 8 \qquad \text{og} \qquad 7d^2 \equiv 7 \pmod 8$$

sem einnig er ómögulegt.

Ef d er slétt tala: Þá er $7d^2$ slétt tala og því verður vinstri hliðin að vera slétt tala og því verða tvær talananna a, b og c að vera oddatölur Þá fæst:

$$a^2 + b^2 + c^2 \equiv 2 \pmod 4 \qquad \text{og} \qquad 7d^2 \equiv 0 \pmod 4$$

sem er ómögulegt.

Ath: Það má líka umskrifa jöfnuna á formið

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8d^2$$

og því er $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \equiv 0 \pmod 4$, en það getur einungis gerst ef allar tölurnar eru sléttar eða allar oddatölur, því $a^2+b^2+c^2+d^2 \equiv k \pmod 4$ þar sem k er fjöldi oddatalna. Ef allar eru sléttar styttum við út 4, eins og í fyrri lausn. Því má gera ráð fyrir að allar séu oddatölur, en þá fæst $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \equiv 4 \pmod 8$ sem er í mótsögn við að 8 gengur upp í hægri hliðina $8d^2$.